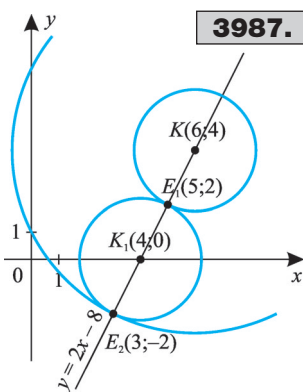


V



3987.

3986. A keresett kör középpontja $K(u; v)$, a sugara $r = 1$. Az adott kör középpontjának koordinátái: $K_1(4; 2)$ és a sugara $r_1 = 1$, az adott pont $P(2; 1)$. Ekkor $KP = 1$ és $KK_1 = 2$.

(1) $(u-2)^2 + (v-1)^2 = 1$, (2) $(u-4)^2 + (v-2)^2 = 4$. (1)-(2) egyenletrendszer gyökei: $u_1 = 2, v_1 = 2, u_2 = 2,8, v_2 = 0,4$. A keresett körre két megoldást kaptunk. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ és $(x-2,8)^2 + (y-0,4)^2 = 1$.

3987. Ha két kör kívülről, vagy belülről érinti egymást, akkor az érintési pontok a középpontokon átmenő egyenesekre illeszkednek. A keresett kör középpontjai: $K(6; 4)$, az adott kör középpontja $K_1(4; 0)$. A centrális egyenes egyenlete: $y = 2x - 8$.

Ez az egyenes az adott kört két pontban metszi. $E_1(5; 2)$, $E_2(3; -2)$.

A sugarak hossza $KE_1 = \sqrt{5}$, $KE_2 = \sqrt{45}$ egység. A körök egyenletei: $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5$ és $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 45$. Utóbbi kör az adott kört belülről érinti.

3988. Adott kör középpontja $K(-2; -2)$, a sugara $r = \sqrt{2}$ egység. A keresett kör középpontja $K(u; v)$ a sugara $r = \sqrt{8}$ egység. A K_1 pontnak két feltételt kell kielégítenie. $K_1K = \sqrt{8} + \sqrt{2}$ és $K_1P = \sqrt{8}$.

A keresett kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \vee \left(x + \frac{47}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{13}\right)^2 = 8$.

3989. Az adott körök kívülről érintik egymást, mert a középpontjaik távolsága a sugaraik hosszának összegével egyenlő. $K_1(-2; -3)$, $r_1 = 10$, $K_2(10; 6)$, $r_2 = 5$. $K_1K_2 = 15$. A keresett kör középpontja rajta van a K_1K_2 egyenesen, másrészt az x tengelyre illeszkedik. K_1K_2 egyenlete: $3x - 4y = 6$. A K középpont koordinátái $(2; 0)$, a sugara $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, az egyenlete $(x-2)^2 + y^2 = 25$.

3990. Az adott kör középpontja $K(-1; 2)$, a sugara $r = 10$, az adott pontja $P(7; 8)$. A keresett kör K_1 középpontjának koordinátái u és v , a sugara $r = |v|$, mert érinti az x tengelyt. K_1 rajta van a KP egyenesen, és $K_1P = r$. A keresett kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

3991. A keresett kör K_1 középpontjának koordinátái $K_1(u; u)$ és a sugara $r = u$. Felírhatjuk u -ra a következő egyenletet (figyelembevéve, hogy az adott kör középpontja $K(-3; -1)$, a sugara $r = 5$: $(u+3)^2 + (u+1)^2 = (5+u)^2$. Innen $u = 5$. A keresett kör egyenlete:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

3992. Az adott körök középpontjainak koordinátái: $K_1(0; 0)$, $K_2(2; 4)$, a sugaraik $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ egység. A keresett kör középpontja $K(u; v)$ a sugara 5 egység; K -ra felírhatjuk a következő egyenletrendszert:
$$\begin{cases} (1) & u^2 + v^2 = 100 \\ (2) & (u-2)^2 + (v-4)^2 = 81 \end{cases}. \quad K'(-6,09; 7,92) \vee K''(9,99; -0,12).$$

3993. Az adott körök sugaraik megegyeznek. Ezért elegendő meghatározni a $K_1(2; 9)$, $K_2(1; 2)$ és a $K_3(9; 8)$ középpontokon átmenő k kör egyenletét, azután a k kör sugarát 2 egységgel csökkentve, illetve növelve megkapjuk a keresett körök egyenletét.

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 9 \text{ és } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 49.$$

3994. Két egymást metsző kör hajlásszögét a metszéspontban húzott érintők hajlásszögével definiáljuk. Az adott körök metszéspontjai: $P_1(3,2; 2,4)$, $P_2(3,2; -2,4)$. A P_1 pontbeli érintők

egyenletei: $e_1: 3,2x + 2,4y = 16$ és $e_2: -1,8x + 2,4y = 0$. e_1 normálvektora $\mathbf{n}_1(3,2; 2,4)$, e_2 normálvektora $\mathbf{n}_2(-1,8; 2,4)$. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ a hajlásszög 90° . P_2 pontban a hajlásszög szintén 90° , mert P_1 és P_2 a centrális egyenesre szimmetrikus pontok.

3995. A keresett kör egyenlete $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$. Mivel a kör átmegy az $(1; 0)$ és a $(0; 1)$ koordinátájú pontokon, azért $u = v$. Ekkor $(1 - u)^2 + u^2 = r^2$, illetve $2u^2 - 2u + 1 = r^2$. Másrészt a metszéspont, a $K(u; v)$ pont és az adott kör $K_1(-1; 0)$ középpontja egy derékszögű háromszög csúcsai, mivel a két kör merőlegesen metszi egymást. Így alkalmazva Pitagorasz tételét: $(u - 1)^2 + u^2 = 1 + r^2$. A két egyenletből: $u = \frac{1}{4}$, $r^2 = \frac{5}{8}$. A keresett kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

3996. A keresett kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = 9$. A $P(2; 3)$ pont rajta van a körön, ezért $(2 - u)^2 + (3 - v)^2 = 9$.

Az E metszéspont, a $K(u; v)$ pont és az $O(0; 0)$ pont derékszögű háromszög csúcsai, mert a keresett kör az adott kört derékszögben metszi. Ezért $u^2 + v^2 = 1 + 9$. A felírt egyenletek megoldásai: $(-1; 3)$ és $\left(\frac{41}{13}; \frac{3}{13}\right)$. Két megoldás van: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ és $\left(x - \frac{41}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{13}\right)^2 = 9$.

3997. A $k_1 - k_2 = 0$ valóban egyenes egyenlete: $16x - 4y + 3 = 0$. A centrális egyenes egyenlete: $x + 4y = 37$. A két egyenes merőleges egymásra, mert $1 \cdot 16 + 4 \cdot (-4) = 0$. A feladat könnyen általánosítható. Legyen a két kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r_1^2$, $(xa)^2 + y^2 = r_2^2$.

3998. a) Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$$\begin{cases} (1) & x^2 + y^2 = 9 \\ (2) & 9 - 6x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{27 \pm 12\sqrt{91}}{50},$$

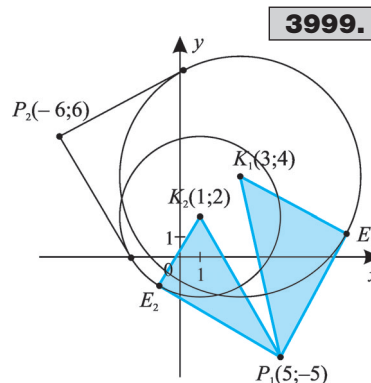
$y = \frac{9}{8} - \frac{81 \pm 36\sqrt{91}}{200}$. A húr hossza $d = \frac{3\sqrt{91}}{5}$ egység. b) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ egység; c) $2\sqrt{2}$ egység;

d) $\frac{2\sqrt{97}}{97}$ egység; e) $10\sqrt{2}$ egység.

3999. A keresett P pont koordinátái: $(x; y)$. Az adott körök adatai: $K_1(3; 4)$, $r_1 = 6$, $K_2(1; 2)$, $r_2 = 4$, az érintési pontok E_1 és E_2 . Ekkor a PK_1E_1 háromszög és a PK_2E_2 háromszög derékszögű. (Az átfogók PK_1 és PK_2 .) A következő egyenleteket írhatjuk fel, alkalmazva a Pitagorasz tételét: (1) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36 + 49$, (2) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 + 49$. (1)-(2) egyenletrendszer gyökei adják a P pont koordinátáit. $P_1(5; -5)$, $P_2(-6; 6)$.

4000. A közös húr végpontjainak koordinátáit az
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$
 egyenletrendszer gyökei adják. $P_1(3; -1)$, $P_2(-1; 3)$. A húr egyenlete: $x + y = 2$. A háromszög területe 2 területegység.

4001. Az adott k kör középpontja $K(-1; 2)$, a sugara $r = 10$ egység. A keresett k_1 kör középpontja $K_1(u; v)$ a sugara $r = |v|$ mert a kör érinti az x tengelyt. (A sugár merőleges az érintőre). Mivel k_1 érinti a k kört a $P(7; 8)$ pont-



ban, azért a K_1 pont rajta van a KP egyenesen. KP egyenlete: $-3x + 4y = 11$. A k_1 kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = v^2$. A P pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, a kör $(u; v)$ koordinátái kielégítik a KP egyenletét. Ekkor $\begin{cases} (1) & -3u + 4v = 11 \\ (2) & (7 - u)^2 + (8 - v)^2 = v^2 \end{cases}$. (1)-(2) egyenletrendszer gyökei: $u_1 = 3, v_1 = 5, u_2 = 23, v_2 = 20$. A keresett kör egyenlete: (3) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ vagy (4) $(x - 23)^2 + (y - 20)^2 = 400$. A (3)-as kör belülről a (4)-es kör kívülről érinti az adott kört a $P(7; 8)$ pontban.

4002. A $K_1(-8; 12)$ középpontú és $r_1 = 10$ egység sugarú kör érinti a $K_2(4; -4)$ középpontú és $r_2 = 10$ egység sugarú kört, mert az $\begin{cases} (x + 8)^2 + (y - 12)^2 = 100 \\ (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 100 \end{cases}$ egyenletrendszert egyetlen számpár, az $E(-2; 4)$ számpár elégíti ki.

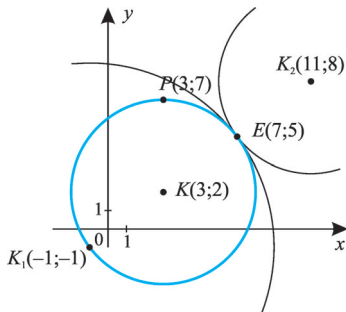
A keresett k kör K középpontjának koordinátái $(u; v)$, a sugara $r = |v|$, mert a kör érinti az x tengelyt. Másrészt a K pont rajta van a K_1K_2 egyenesen, amelynek egyenlete $4x + 3y = 4$. A K kör átmegy az $E(-2; 4)$ ponton, ezért E koordinátái kielégítik a k kör egyenletét. Két érintőkör

van: $(x + 14)^2 + (y - 20)^2 = 400$ és $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{9}\right)^2 = \frac{400}{81}$.

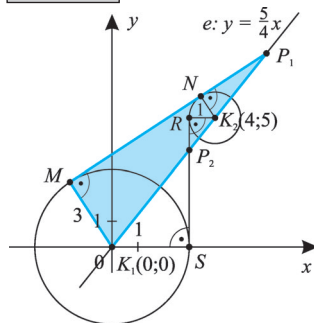
4003. $(x - 20)^2 + (y - 22)^2 = 400$ és $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

4004. Készítsünk ábrát. A k_1 kör K_1 középpontjának koordinátái $K_1(-1; -1)$ a sugara $r_1 = 10$ egység. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátái $K_2(11; 8)$ a sugara $r_2 = 5$ egység.

4004.



4006.



$K_1K_2 = 15$, a két kör érinti egymást. Az E érintési pont koordinátái $E(7; 5)$. A k kör $K(u; v)$ középpontja rajta van a K_1K_2 egyenesen és a PE szakasz felezőmerőlegesén, mert k érinti a k_1 kört belülről, a k_2 kört kívülről az E pontban, és átmegy a P ponton. u -ra, v -re felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} (1) & 3u - 4v = 1 \\ (2) & 2u - v = 4 \end{cases}$. (1) a PE szakasz felezőmerőlegesének egyenlete, (2) a K_1K_2 egyenes egyenlete. Innen $u = 3, v = 2$, a sugár 5 egység. k egyenlete: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

4005. Az $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = r^2$ egyenletű kör, amely az adott körrel koncentrikus az x tengelyt az $A(-3 + \sqrt{r^2 - 1}; 0)$ és a $C(-3 - \sqrt{r^2 - 1}; 0)$, az y tengelyt a $B(0; -1 + \sqrt{r^2 - 9})$ és a $D(0; -1 - \sqrt{r^2 - 9})$ pontokban metszi, ahol $r > 3$. Az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra és a területe:

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{2\sqrt{r^2 - 9} \cdot 2\sqrt{r^2 - 1}}{2} = 8\sqrt{15}. \text{ Innen } r^2 = 21.$$

A k kör egyenlete: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 21$.

4006. Az adott k_1 kör K_1 középpontja az origó, $K_1(0; 0)$, a sugara $r_1 = 3$ egység, a k_2 kör K_2 középpontjának koordi-

nátái $K_2(4; 5)$, a sugara $r_2 = 1$ egység. $K_1K_2 = \sqrt{41}$ egység. A centrális egyenlete $y = \frac{5}{4}x$.

A két körhöz közös érintő a külső, illetve a belső hasonlósági pontból húzható. A külső hasonlósági P_1 pont koordinátái legyenek $(a; b)$. P_1 -nek az origótól való távolságát a K_1MP_1 és a K_2NP_1 hasonló derékszögű háromszögek segítségével számíthatjuk ki.

$$\frac{K_1P_1}{K_2P_1} = \frac{K_1M}{K_2N} \Rightarrow \frac{\sqrt{41} + K_2P_1}{K_2P_1} = \frac{3}{1}. \text{ Innen } K_2P_1 = \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ és } K_1P_1 = \frac{3\sqrt{41}}{2} \text{ egység. Ekkor az}$$

$(a; b)$ koordinátákra a következő egyenletrendszert írhatjuk fel: $b = \frac{5}{4}a$ és

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{3\sqrt{41}}{2} \right)^2. \text{ Innen } a = 6, b = \frac{15}{2}. \text{ A } K_1SP_2 \text{ és a } K_2RP_2 \text{ hasonló derékszögű háromszö-}$$

gek segítségével számíthatjuk ki a P_2 belső hasonlósági pont koordinátáit. $P_2\left(3; \frac{15}{4}\right)$.

4007. Tegyük fel, hogy a $P(a; b)$ pontból húzható egyenlő d hosszúságú érintő az adott körkhöz. Ekkor a P pont, a körök $K_1(-3; 5)$ és $K_2(9; 2)$ középpontja és az E_1, E_2 érintési pontok a PK_1E_1 és a PK_2E_2 derékszögű háromszögeket feszítik ki. $PE_1 = PE_2 = d$, $K_1E_1 = 3$, $K_2E_2 = 1$. $PK_1^2 = (a + 3)^2 + 5^2$, $PK_2^2 = (a - 9)^2 + 4$. $d^2 = (a + 3)^2 + 5^2 - 3^2$ és $d^2 = (a - 9)^2 + 1^2$. Ezekből az egyenletekből $a = \frac{11}{4}$. Az x tengely $\left(\frac{11}{4}; 0\right)$ pontjából húzható egyenlő

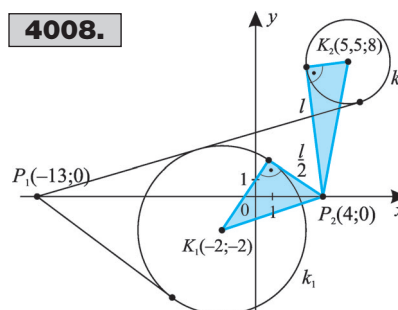
hosszúságú érintők az adott körkhöz. (Az egyenlő érintők $\sqrt{42,0625}$ egység hosszúak.)

4008. Jelöljük az x tengely azon P pontjának koordinátáit $(a; 0)$ -val, amelyből a $k_1: \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y - 8)^2 = 6,25$ egyenletű körhöz kétszer olyan hosszú érintő húzható, mint a $k_2: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$ körhöz. A P pont a körök középpontjai és az érintési pontok egy-egy derékszögű háromszöget határoznak meg. Legyen a k_1 körhöz húzott érintő hossza l . Ekkor a

$$\text{következő egyenleteket írhatjuk fel Pitagorász tétele szerint: } l = \sqrt{\left(a - \frac{11}{2}\right)^2 + (0 - 8)^2 - 6,25},$$

$$\frac{l}{2} = \sqrt{(a + 2)^2 + (0 + 2)^2 - 25}. \text{ Két megoldás van. } P_1(-13; 0), P_2(4; 0).$$

4009. A keresett k kör $K(u; v)$ középpontja rajta van az PQ szakasz felezőmerőlegesén az $x + y = 16$ egyenletű egyenesen. Másrészt $KR = KP + 2 = KQ + 2$. Ennek alapján az $(u; v)$ koordinátákra a következő egyenleteket írhatjuk fel: (1) $u + v = 16$, (2) $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + (v - 12)^2} + 2$. $K_1(8,3; 7,7)$ és $K_2(12,3; 3,7)$. A feladatnak a K_1 felel meg. A K_2 középpontú K_2P sugarú körnek az $R(0; 0)$ pont belső pontja. A keresett kör sugara $KP \approx 11$ méter. A tó átmérője méter pontossággal 22 méter.



A parabola

A parabola egyenlete

4010. és **4011.** A feladatok megoldását az olvasóra bízunk.

4012. A parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2p} x^2$. Ha a $P_1(x_1; y_1)$ pont rajta van a parabolán, akkor $y_1 = \frac{1}{2p} x_1^2$. Válasszunk olyan $P(x; y)$ pontot, amely a parabola külső pontja. Húzzunk a P ponton át a parabola tengelyével párhuzamos egyenest. Ez egy $P_1(x_1; y_1)$ pontban metszi a parabolát. Ekkor $x = x_1$ és $y < y_1$. Ezért $y_1 = \frac{1}{2p} x_1^2 = \frac{1}{2p} x^2 > y$. Hasonlóan igazolható, hogy ha a $P(x; y)$ pont a parabola belső pontja, akkor $\frac{1}{2p} x^2 < y$.

4013. Az $(1; 2)$ pont belső pont, mert $2 > \frac{1}{12}$. A $(6; 3)$ parabolapont, $(-3; 1)$ belső, a $(-7; 4)$ külső pont.

4014. a) $y = \frac{1}{2p} x^2$ egyenletbe helyettesítsük be a $(12; 6)$ pontot. Ekkor $6 = \frac{1}{2p} 144$. Innen $2p = 24$. Tehát a parabola egyenlete: $y = \frac{1}{24} x^2$. Ha a parabola tengelye az x tengely, akkor az $y^2 = 2px$ egyenletből $36 = 2p \cdot 12$, $y^2 = 3x$. b) $y = \frac{1}{4} x^2$, $y^2 = 4x$; c) $y = \frac{3}{16} x^2$, $y^2 = -\frac{9}{4} x$; d) $y = -\frac{3}{32} x^2$, $y^2 = -\frac{9}{2} x$.

4015. a) $y = \frac{1}{16} x^2$; b) $y = -\frac{1}{12} x$; c) $y = \frac{1}{8} x^2$; d) $y = -\frac{1}{32} x$; e) $y^2 = 16x$; f) $y^2 = -20x$.

4016. a) $y^2 = -28x$. b) $y = \frac{1}{16} x^2$.

4017. a) A parabola paramétere $p = 4$. Az $y = \frac{1}{8} x^2$ egyenletű parabolát eltoljuk a $v(4; 1)$ vektorral. Az eltolt parabola egyenlete $y = \frac{1}{8} (x - 4)^2 + 1$. Innen $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$. (4017.

ábra). b) $x^2 - 4x + 12y + 4 = 0$; c) $x^2 - 6x + 16y - 23 = 0$; d) $y^2 - 4y - 6x + 19 = 0$;

e) $y^2 - 6y - 6x - 6 = 0$; f) $x^2 + 2x - 8y + 17 = 0$;

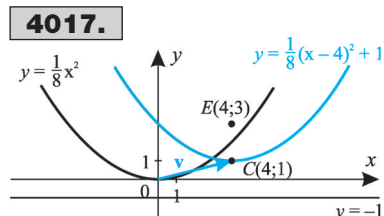
g) $y^2 - 4y - 16x + 68 = 0$. h) Két megoldás van:

$x^2 - 16y + 32 = 0$ vagy $x^2 + 16y - 160 = 0$. i) Két megoldás van:

$y^2 - 4y - 8x + 36 = 0$ vagy $y^2 - 4y + 8x - 60 = 0$.

4018. a) $c = 0$. b) A $P(2; 1)$ pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: $4a + 2b + c - 1 = 0$;

c) $16a - 4b + c = 0$; d) $9a + 3b + c + 2 = 0$.



4019. A parabola tengelypontjának koordinátái: $C(u; 2)$, a paramétere: $p = 3$. Az egyenlete: $y = \frac{1}{6}(x - u)^2 + 2$. Mivel a parabola átmegy a $(0; 8)$ ponton, azért $8 = \frac{1}{6}(-u)^2 + 2$. Innen

$$u = \pm 6. \text{ Két megoldás van: } y = \frac{1}{6}(x - 6)^2 + 2 \text{ vagy } y = \frac{1}{6}(x + 6)^2 + 2.$$

4020. Két eset lehetséges. A parabola az x tengely pozitív irányában vagy negatív irányában nyílik szét. $2p = 1$, tehát $(y - v)^2 = x - u$ az egyenlete, vagy $(y - v)^2 = -(x - u)$. Figyelembe véve az adott parabolapontok koordinátáit: a következő egyenletrendszereket írhatjuk fel:

$$(1) \begin{cases} (4 - v)^2 = -6 - u \\ (1 - v)^2 = 9 - u \end{cases} \text{ és } (2) \begin{cases} (4 - v)^2 = -(-6 - u) \\ (1 - v)^2 = -(9 - u) \end{cases}. \text{ Az (1)-es egyenletrendszerből}$$

$(y - 5)^2 = x + 7$, a (2)-es egyenletrendszerből $y^2 = -(x - 10)$ egyenleteket kapjuk.

4021. a) A tengelypont koordinátái $(0; v)$, a parabola egyenlete $(y - v)^2 = -2px$. Az adott pontok koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: $\begin{cases} (-1 - v)^2 = 2p \\ (1 - v)^2 = -8p \end{cases}$. Innen $v_1 = -3, p_1 = 2$,

$$v_2 = -\frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{9}. \text{ Két parabolát kapunk. } (y + 3)^2 = -4x \text{ és } \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}x.$$

$$b) 3y = (x - 5)^2 \text{ és } (x - 1)^2 = \frac{1}{3}y.$$

4022. A keresett parabolák egyenletei: $y = (x - 6)^2$ vagy $y = \frac{1}{25}(x + 6)^2$.

4023. A parabola tengelyesen szimmetrikus. A keresett parabola szimmetriatengelye az $x = 1$ egyenletű egyenes. A parabola átmegy a $(2; 0)$ ponton és ezen pontnak az $x = 1$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképén a $(0; 0)$ ponton is. Felírhatjuk a, b, c -re a következő egyen-

$$\text{letrendszert: } \begin{cases} -1 = a + b + c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 0 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \end{cases}. \text{ Innen } a = 1, b = -2, c = 0.$$

4024. A közös fókuszú parabolák vezéregyeneseit úgy kapjuk meg, hogy a parabola definícióját figyelembe véve a P_1 és P_2 pontok körül P_1F és P_2F sugarú köröket rajzolunk, és meghatározzuk ezen körök közös külső érintőit. Az érintők egyik-egyik parabola vezéregyenesét adják. $P_1F = 2, P_2F = 5, P_1P_2 < P_1F + P_2F$. A két kör metszi egymást. A centrális egyenlete $x + 2y = 8$. Az egyik külső érintő az x tengely, a másik külső érintő egyenlete:

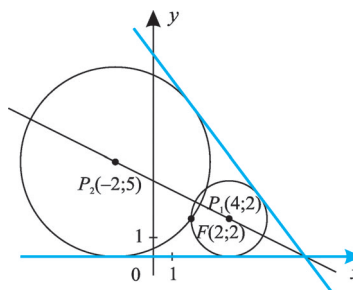
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}. \text{ Az egyik parabola paramétere } 2, \text{ a másik}$$

parabola paramétere az $F(2; 2)$ pontnak a $4x + 3y - 32 = 0$ egyenletű egyenestől mért távolsága: 3,6 egység.

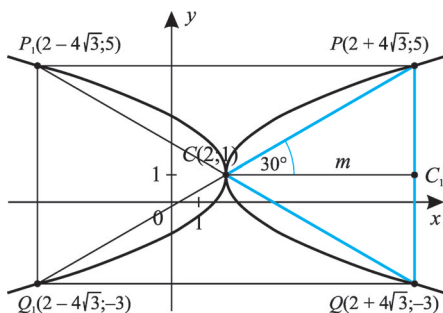
4025. Mivel mindkét egyenletben az x^2 együtthatója azonos, a két parabola egybevágó (mindkét parabola felfelé nyílik szét). A csúcspontjaik koordinátái: $C_1(2p; 2 - 4p^2)$, $C_2(-p; -p^2 - 4)$. A $\overrightarrow{C_1C_2}$ vektor koordinátái: $(-3p; 3p^2 - 6)$.

$$\left| \overrightarrow{C_1C_2} \right| = \sqrt{(3p)^2 + (3p^2 - 6)^2} = 3 \sqrt{\left(p^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}}.$$

4024.



4030.



4028. $ay^2 + b^2x - ab^2 = 0$.

4029. $bx^2 + a^2y - a^2b = 0$.

4030. Az ábra szerint a CPQ szabályos háromszög CC_1 magassága $\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ egység.

A CP egyenes egyenlete $y - 1 = \operatorname{tg} 30^\circ(x - 2)$, illetve $y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$. A P pont abszcisszája $2 + 4\sqrt{3}$, az ordinátája a CP egyenletből $y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 + 4\sqrt{3} - 2)$, $y = 5$. A keresett parabola átmegy a $C(2; 1)$, $P(2 + 4\sqrt{3}; 5)$ és a $Q(2 + 4\sqrt{3}; -3)$ pontokon. A parabola egyenlete: $(y - v)^2 = 2p(x - u)$, ahol $(u; v)$ a C csúcs (tengelypont) koordinátái. $u = 2$, $v = 1$. Helyettesítsük a parabola egyenletébe a P pont koordinátáit. Ekkor $(5 - 1)^2 = 2p(2 + 4\sqrt{3} - 2)$.

Innen $2p = \frac{4\sqrt{3}}{2}$. A CPQ pontokon átmenő parabola egyenlete: $(y - 1)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - 2)$.

(Szimmetria miatt a Q pont koordinátái is kielégítik a parabola egyenletét.) Még egy megoldást kapunk, ha a CPQ háromszöget az $x = 2$ egyenletű egyenesre tükrözzük. A $C(2; 1)$, $P_1(2 - 4\sqrt{3}; 5)$, $Q_1(2 - 4\sqrt{3}; -3)$ csúspontokon átmenő parabola egyenlete:

$$(y - 1)^2 = \frac{-4\sqrt{3}}{3}(x - 2).$$

4031. Helyezzük el a parabolát a koordináta-rendszerben úgy, hogy a híd tartószerkezetének két végpontja $A(-30; 0)$, $B(30; 0)$ és a legmagasabb pontja $C(0; 15)$ legyen. A parabolaív egyenlete: $y = -\frac{1}{p}x^2 + 15$. Ekkor $0 = -\frac{1}{2p}900 + 15$, innen $2p = 60$. A parabola egyenlete:

$y = -\frac{1}{60}x^2 + 15$, ahol $-30 \leq x \leq 30$. A függőleges tartóvasak hossza méterben rendre:

$\frac{55}{12}$; $\frac{25}{3}$; $\frac{45}{4}$; $\frac{40}{3}$; $\frac{175}{12}$; 15, ha az x helyére rendre behelyettesítjük a -25 , -20 , -15 , -10 , -5 , 0 értékeket. A szimmetria miatt az első öt hosszúság a másik oldalon is érvényes.

Az eltolásvektor hossza akkor a legkisebb, ha

$$p^2 = \frac{3}{2}, \quad p = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \left| \overrightarrow{C_1 C_2} \right|_{\min} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ egység.}$$

4026. a) $x^2 - 4x - 4y = 0$; b) $y = \frac{2}{9}x^2$;

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$; d) $7x^2 - 25x + 6y + 12 = 0$;

e) $3x^2 - 33x - 4y + 76 = 0$.

4027. A parabola egyenlete: $(y - v)^2 = 2p(x - u)$ alakú. Itt $v = 0$, $u = -5$ és a $P(0; 6)$ pont a parabola lángra illeszkedik. A parabola egyenlete $5y^2 - 36x - 180 = 0$.

V

4032. A parabola átmege az $A(0; 0)$, $B(36; 0)$ és a $C(18; 12)$ pontokon, a tengelye párhuzamos az y tengellyel, a tengelypontja a C pont. Az egyenlete: (1) $y = -\frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$ alakú, ahol $u = 18$, $v = 12$ és $x = y = 0$. Ezeket az adatokat behelyettesítve az (1)-es egyenletbe $2p = 27$. A röppálya egyenlete: $y = -\frac{1}{27}(x-18)^2 + 12$, ahol $0 \leq x \leq 36$.

4033. Induljon a vízszög az $A(-1; 0)$ pontból és a $B(1; 0)$ pontba érkezen vissza a talajra. $p = \frac{1}{10}$. A parabolaív egyenlete: $y = -\frac{1}{2p}x^2 + v$.

Ekkor $0 = -\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)}1 + v$. A vízszög $v = 5$ méter magasra emelkedik.

4034. Tekintsük az ábrát. A parabola fókuszusa az $A(0; 0)$ pont és a parabola átmege a $T\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ tengelyponton és a háromszög $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ és $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ csúcsain. Ekkor a parabola egyenlete: $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ alakú. Behelyettesítve a B vagy a C csúcs koordinátáit, p -re a

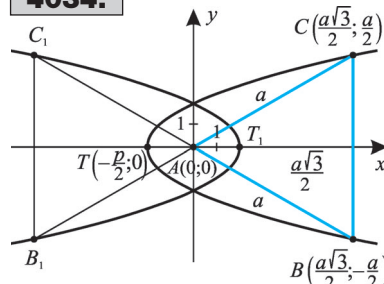
következő egyenletet kapjuk: $p^2 + (a\sqrt{3})p - \frac{a^2}{4} = 0$. Innen, mivel $p > 0$, $p = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$ adódik. A parabola egyenlete: $y^2 = a(2 - \sqrt{3})\left(x + \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$. Ha a tengelypont $T\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, akkor az egyenlet: $y^2 = -a(2 + \sqrt{3})\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

4035. A parabola tengelye az y tengely, az $(r; 0)$, $(\sqrt{r^2 - b^2}; b)$, $(-\sqrt{r^2 - b^2}; b)$ $(-r; 0)$ pontok rajta vannak a parabolán. Egyenlete: $y = -\frac{1}{2p}x^2 + v$ alakú. Legyen $y = 0$, $x = r$, ekkor $r^2 = 2pv$. A $(\sqrt{r^2 - b^2}; b)$ pont is illeszkedik a parabolára. Ezért $b = -\frac{1}{2p}(r^2 - b^2) + v$. Az

$\left. \begin{matrix} r^2 = 2pv \\ 2pb = b^2 - r^2 + 2pv \end{matrix} \right\}$ egyenletrendszerből $2p = b$ és $v = \frac{r^2}{b}$. A parabola egyenlete: $y = -\frac{x^2}{b} + \frac{r^2}{b}$, illetve $x^2 + by - r^2 = 0$.

4036. a) $p = 12$, $F(0; 6)$, $y + 6 = 0$; b) $p = 4$, $F(0; -2)$, $y - 2 = 0$; c) $p = 3$, $F\left(0; \frac{3}{2}\right)$, $y + \frac{3}{2} = 0$; d) $p = \frac{1}{2}$, $F\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, $y - \frac{1}{4} = 0$; e) $p = 2$, $F(0; -1)$, $y - 1 = 0$; f) $p = 4$,

4034.



$F(-6; 7)$, $y - 3 = 0$; $g) p = 2$, $F(-1; 2)$, $y - 4 = 0$; $h) p = 6$, $F(0; 2)$, $x + 6 = 0$; $i) p = 2$, $F(0; -7)$, $y + 9 = 0$; $j)$ Az egyenlet $y^2 = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)$ alakban is felírható. Innen $2p = 6$, $\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$, $F\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}; 0\right)$, $F\left(-\frac{5}{6}; 0\right)$, $x = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$, $x = \frac{13}{6}$. $k) p = 3$, $F\left(0; \frac{7}{2}\right)$, $y - \frac{1}{2} = 0$;

$l) p = \frac{1}{2}$, $F\left(0; \frac{7}{4}\right)$, $y - \frac{9}{4} = 0$. $m)$ A parabola egyenlete: $y = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + 1$,

$y = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 1$ alakban is felírható. Hasonlítsuk össze a parabola egyenletét az

$y = \frac{1}{2p}(x - u)^2 + v$ egyenlettel. $2p = 4$, $u = -2$, $v = 1$. A tengelypont koordinátái $C(-2; 1)$,

$F(-2; 2)$, a vezéregyenes egyenlete: $y = 0$. $n) y = -\frac{1}{6}(x^2 - 12x + 36) - 1$,

$y = -\frac{1}{6}(x - 6)^2 - 1$. $p = 3$, $F\left(6; -\frac{5}{2}\right)$, $y = -1 + \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. $o) (y - 1)^2 = 10(x + 2)$ egyen-

letből $p = 5$, $F\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $x + \frac{9}{2} = 0$. $p) p = 1$, $F\left(4; -\frac{9}{2}\right)$, $y + \frac{11}{2} = 0$; $q) p = 4$, $F(4; 4)$,

$y - 8 = 0$; $r) p = \frac{3}{200}$; $F\left(\frac{3}{400}; 0\right)$, $x + \frac{3}{400} = 0$; $s) (y - 5)^2 = -2\left(x - \frac{49}{2}\right)$ egyenletből

$p = 1$, $F(-25; 5)$, $y + 24 = 0$; $t) p = \frac{1}{10}$; $F\left(8; -\frac{1}{20}\right)$, $y - \frac{1}{20} = 0$; $u) p = 5$; $F\left(-\frac{5}{20}; 0\right)$,

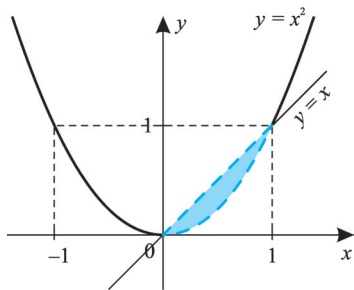
$y + 5 = 0$.

4037. $y = x$, ha $x^2 = 4(x - 1)$. Megoldás: $P(2; 2)$.

4038. Az egyenlőtlenség átalakítható: $y > \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 9$. Az egyenlőtlenséget a parabola belső (a fókuszot tartalmazó tartomány) pontjainak koordinátái elégítik ki.

4039. A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0. Tehát $y = x^2$ vagy $x = \pm 1$, vagy $(y - 2)(y - 3) = 0$ -ból $y = 2$ vagy $y = 3$. A ponthalmaz a normál parabola az $x = 1$, $x = -1$, $y = 2$, $y = 3$, egyenletű egyenesek pontjainak uniója. Ezen halmaz pontjainak koordinátái és csakis ezek elégítik ki az adott egyenlőtlenséget.

4041.



4040. Az egyenlettel ekvivalens az $(x^2 - y)^2 = 1$, illetve az $x^2 - y = \pm 1$ egyenlet. Innen $y = x^2 - 1$ vagy $y = x^2 + 1$. Az adott egyenlet az $y = x^2 - 1$ és az $y = x^2 + 1$ egyenletű parabolák pontjainak koordinátái elégítik ki.

4041. A megoldást az ábrán látható zárt síktartomány belső pontjainak koordinátái adják.

4042. $(y - x)(y - x^2 + 3x - 2) < 0$, ha $a) y < x$ és

$y > \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$; $b) y > x$ és $y < \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Az $y = x$, egyenes és az $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ parabola közös pont-

jainak koordinátái: $x_1 = y_1 = 2\sqrt{2} \approx 3,4$ $x_2 = y_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,6$. Az $a) - b)$ feltételeket kielégítő pontok halmazát az ábrán vázoltuk.

4043. Ha $x \geq 0$, akkor $x^3 - 4x - xy \leq 0$, illetve $x(x^2 - 4 - y) \leq 0$. Ez az egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha $y \geq x^2 - 4$. Ha pedig $x < 0$, akkor $y \geq -x^2 + 4$. A ponthalmazt az ábrán vázoltuk.

4044. Legyen a $Q(x; y)$ pont az $y = x^2$ egyenletű parabola pontja és a $Q_1(x_1; y_1)$ a Q pontnak a $P(1; 1)$ pontra vonatkozó tükörképe. Ekkor $\frac{x + x_1}{2} = 1$, $\frac{y + y_1}{2} = 1$. Innen $x = 2 - x_1$,

$$y = 2 - y_1, y = x^2, \text{ tehát } 2 - y_1 = (2 - x_1)^2.$$

$y_1 = -x_1^2 + 4x_1 - 2$. Az $y = x^2$ egyenletű parabola tükörképe az $y = -x^2 + 4x - 2$; $y = -(x - 2)^2 + 2$ egyenletű parabola.

4045. Legyen a $Q(x; y)$ pont az $y = -2x^2 + 4x - 2$ egyenletű parabola pontja a $Q_1(x_1; y_1)$ a Q pont tükörképe. Ekkor $x = 4 - x_1$ és $y = 2 - y_1$. Helyettesítve az adott parabola egyenletébe, és rendezve az egyenletet: $y_1 = 2(x_1 - 5)^2 - 2$. Az $y = -2(x + 1)^2 + 2$ egyenletű parabolát tükrözve a $P(2; 1)$ pontra a tükörkép parabola, amelynek egyenlete: $y = 2(x - 5)^2 - 2$.

4046. Ismeretes, hogy ha a $P(x; y)$ pontot az $y = x$ egyenletű egyenesre tükrözzük, akkor a P pont a $Q(x; y)$ pontba megy át. a) Az $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ egyenletű parabola az

$x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 3$ egyenletű görbébe megy át, amely egyenlet a következőképpen is írható:

(1) $(y - 4)^2 = 2(x + 5)$. (1) olyan parabola egyenlete, amelynek tengelye párhuzamos az x tengellyel, a tengelypontja $C(-5; 4)$, a paramétere 1, a fókuszának koordinátái: $F\left(-\frac{9}{2}; 4\right)$.

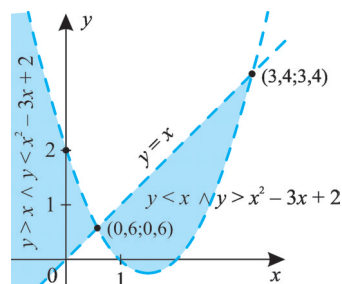
b) $C(-3; -2), F(-2; -2)$.

4047. A parabola pontjai a következők: $P_1(4\sqrt{2}; 4), P_2(-4\sqrt{2}; 4), P_3(4\sqrt{6}; 12), P_4(-4\sqrt{6}; 12)$. A lehetséges 4 húr közül 2-2 egyenlő hosszúságú. $P_1P_3 = 8\sqrt{3 - \sqrt{3}}, P_1P_4 = 8\sqrt{3 + \sqrt{3}}$.

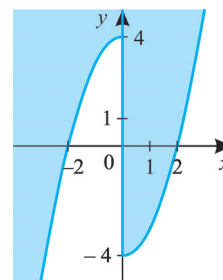
4048. $P(6; 6), F\left(0; \frac{3}{2}\right), PF = \frac{15}{2}$.

4049. $P(6\sqrt{2}; 6), F(0; 3), PF = 9$.

4042.



4043.



V